

## المستقيم في المستوى

### I- معلم مستوى (تذكير و إضافات)

#### 1- أنشطة

- في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ،  
نعتبر النقط  $A(1;2)$  و  $B(-3;-1)$  و  $C(3;-2)$  و متجهين  $\vec{u}(-2;3)$  و  $\vec{v}(2;4)$ .  
1- أنشئ النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  و المتجهين  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$   
2- حدد زوج إحداثيتي كل من  $\overline{AB}$  و  $\overline{AC}$  و  $2\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$   
3- حدد زوج إحداثيتي  $D$  حيث  $\overline{AB} = \overline{BD}$   
4- حدد زوج إحداثيتي  $I$  منتصف  $[AB]$

#### 2- شرط استقامة متجهين

##### أ- محددة متجهين

##### تعريف

لتكن  $\vec{u}(x;y)$  و  $\vec{v}(x';y')$  متجهين

العدد  $xy' - x'y$  يسمى محددة المتجهين  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  (في هذا الترتيب) نرسم له بـ  $\det(\vec{u};\vec{v})$  أو  $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$

$$\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$$

**مثال** نعتبر  $\vec{u}(-2;3)$  و  $\vec{v}(2;4)$  و  $\vec{w}(-5;0)$

حدد  $\det(\vec{u};\vec{w})$  و  $\det(\vec{u};\vec{v})$

ب- لتكن  $\vec{u}(x;y)$  و  $\vec{v}(x';y')$  غير منعدمتين

\*  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  مستقيمتان تكافئ  $\vec{u} = k\vec{v}$

تكافئ  $x = kx'$  و  $y = ky'$

ومنه  $xy' - x'y = kx'y' - kx'y' = 0$

نفترض  $x' \neq 0$  و  $xy' - x'y = 0$

\* نضع  $\frac{x}{x'} = k$  ومنه  $x = kx'$

و بالتالي  $xy' - x'y = 0$  تكافئ  $y = ky'$

إذن  $\vec{u} = k\vec{v}$

إذا كان  $\vec{u}$  أو  $\vec{v}$  منعدما فإن  $xy' - x'y = 0$

##### خاصية

تكون  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  مستقيمتين إذا وفقط إذا كان  $\det(\vec{u};\vec{v}) = 0$

تكون  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  غير مستقيمتين إذا وفقط إذا كان  $\det(\vec{u};\vec{v}) \neq 0$

##### مثال

لتكن  $\vec{u}(\sqrt{2}+1;1)$  و  $\vec{v}(1;\sqrt{2}-1)$  و  $\vec{w}(-1;\sqrt{2})$

أدرس استقامة  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  ثم  $\vec{u}$  و  $\vec{w}$

##### تمرين

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ،

نعتبر النقط  $A\left(\frac{1}{2};3\right)$  و  $B(-2;-2)$  و  $C(1;4)$  و متجهة  $\vec{u}(1;3)$

5- أنشئ النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  و المتجهة  $\vec{u}$

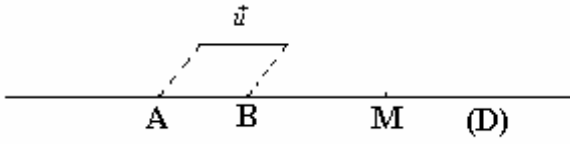
6- حدد  $x$  حيث  $\vec{u}$  و  $\vec{v}(x-2;5)$  مستقيمتان

7- بين أن النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  مستقيمية

## -II- المستقيم في المستوى

### 1- مستقيم معرف بنقطة و متجهة

لتكن  $A$  نقطة و  $\vec{u}$  متجهة غير منعدمة  
نحدد  $(D)$  مجموعة النقط  $M$  حيث  $\overline{AM} = t\vec{u}$  ;  $t \in \mathbb{R}$



لنضع  $\overline{AB} = \vec{u}$

\*  $(D) \neq \emptyset$  لان  $B \in (D)$

\* نعلم أن  $\overline{AM} = t\overline{AB}$  ;  $t \in \mathbb{R}$  تكافئ  $M \in (AB)$

$(D) = (AB)$

$(D)$  يسمى المستقيم المار من  $A$  و الموجه بـ  $\vec{u}$

### تعريف

لتكن  $A$  نقطة و  $\vec{u}$  متجهة غير منعدمة  
مجموعة النقط  $M$  حيث  $\overline{AM} = t\vec{u}$  ;  $t \in \mathbb{R}$  هي المستقيم المار من  $A$  و الموجه بـ  $\vec{u}$  نرمز له بـ  $D(A; \vec{u})$

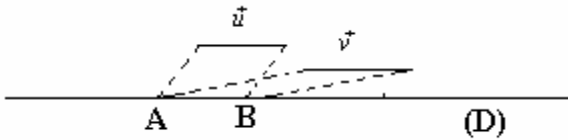
### ملاحظة

لتكن  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  غير منعدمتين

\* إذا كان  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  مستقيمتين فان  $D(A; \vec{u}) = D(A; \vec{v})$

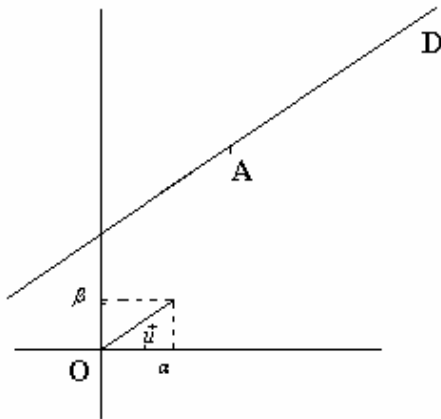
\* إذا كان  $B \in D(A; \vec{u})$  فان  $D(A; \vec{u}) = D(B; \vec{u})$

\*  $\overline{AB}$  موجهة للمستقيم  $(AB)$



### 2- تمثيل بارامتري لمستقيم

في مستوى منسوب إلى معلم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، نعتبر  $(D)$  مستقيم  
مار من النقطة  $A(x_0; y_0)$  و  $\vec{u}(\alpha; \beta)$  موجهة له



$M \in (D)$  تكافئ توجد  $t$  من  $\mathbb{R}$  حيث  $\overline{AM} = t\vec{u}$

$$\begin{cases} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \text{ تكافئ}$$

النظمة  $\begin{cases} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$  تسمى تمثيل بارامتري

للمستقيم  $(D)$  المار من  $A(x_0; y_0)$  و الموجه بـ  $\vec{u}(\alpha; \beta)$

### مبرهنة وتعريف

المستوى منسوب إلى معلم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  و  $\vec{u}(\alpha; \beta)$  متجهة غير منعدمة و  $A(x_0; y_0)$  نقطة.

كل مستقيم  $(D)$  مار من  $A(x_0; y_0)$  و موجه بـ  $\vec{u}(\alpha; \beta)$  له نظمة على شكل  $t \in \mathbb{R}$

النظمة  $\begin{cases} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$  تسمى تمثيل بارامتري للمستقيم  $(D)$  المار من  $A(x_0; y_0)$  و الموجه

بـ  $\vec{u}(\alpha; \beta)$

## تمرين

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ،  
نعتبر النقط  $A(-2;1)$  و  $B(0;-2)$  و  $C(1;4)$  و متجهتين  $\vec{u}(-2;3)$  و  $\vec{v}(4;-6)$ .

$$\text{لتكن } t \in \mathbb{R} \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \end{cases} \text{ تمثيلا بارامتريا لمستقيم } (\Delta)$$

1- أنشئ المستقيم  $(D)$  المار من  $A$  و الموجه بـ  $\vec{u}$  و المستقيم  $(\Delta)$

2- أ- حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم  $(D)$

ب- أعط ثلاث نقط تنتمي إلى المستقيم  $(D)$

ج- هل النقطتين  $B$  و  $C$  تنتميان إلى المستقيم  $(D)$

3- أ- بين أن  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  مستقيمتان

ب- حدد تمثيلا بارامتريا لـ  $D(C; \vec{v})$ . ماذا تلاحظ

4- حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم  $(AC)$

## ملاحظة

كل مستقيم يقبل ما لا نهاية من التمثيلات البارامترية

## 3- معادلة ديكارتية لمستقيم

### أ- مستقيم معرف بنقطة و متجهة

في مستوى  $(P)$  منسوب إلى معلم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ،

نعتبر  $(D)$  مستقيم مار من النقطة  $A(x_0; y_0)$  و  $\vec{u}(\alpha; \beta)$  موجهة له.

لتكن  $M(x; y)$  نقطة من  $(P)$

$M \in (D)$  تكافئ  $\overline{AM}$  و  $\vec{u}$  مستقيمتان

$$\text{تكافئ } \begin{vmatrix} x - x_0 & \alpha \\ y - y_0 & \beta \end{vmatrix} = 0$$

تكافئ  $\beta x - \alpha y + \alpha y_0 - \beta x_0 = 0$

نضع  $-\alpha = b$  ;  $\beta = a$  ;  $c = \alpha y_0 - \beta x_0$

$M \in (D)$  تكافئ  $ax + by + c = 0$  حيث  $(a; b) \neq (0; 0)$

## مبرهنة

في مستوى منسوب إلى معلم

كل مستقيم  $(D)$  له معادلة على شكل  $ax + by + c = 0$  حيث  $(a; b) \neq (0; 0)$ .

## \* العكس

لتكن  $a$  و  $b$  و  $c$  اعداد حقيقية حيث  $(a; b) \neq (0; 0)$

لنحدد  $(D)$  مجموعة النقط  $M(x; y)$  حيث  $ax + by + c = 0$

لنفرض أن  $a \neq 0$

$(D)$  غير فارغة لأن  $C\left(\frac{-c}{a}; 0\right) \in (D)$

لتكن  $A(x_0; y_0) \in (D)$  ومنه  $ax_0 + by_0 + c = 0$

وبالتالي  $c = -ax_0 - by_0$

$M(x; y) \in (D)$  تكافئ  $ax + by + c = 0$

تكافئ  $ax + by - ax_0 - by_0 = 0$

تكافئ  $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$

$$\text{تكافئ } \begin{vmatrix} x - x_0 & -b \\ y - y_0 & a \end{vmatrix} = 0$$

تكافئ  $\vec{AM}$  و  $\vec{u}(-b;a)$  مستقيمتان

تكافئ  $M \in D(A;\vec{u})$

### مبرهنة

في مستوى منسوب إلى معلم مجموعة النقط  $M(x;y)$  حيث  $ax+by+c=0$

و  $(a;b) \neq (0;0)$  هي المستقيم  $(D)$  الموجه بـ  $\vec{u}(-b;a)$

المعادلة  $ax+by+c=0$  حيث  $(a;b) \neq (0;0)$  تسمى معادلة ديكارتية للمستقيم  $(D)$  الموجه بـ  $\vec{u}(-b;a)$

### تمرين

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد منظم  $(O;\vec{i};\vec{j})$ ، نعتبر النقطة  $A(-2;1)$  و  $\vec{u}(1;2)$ .

لتكن  $2x-3y+1=0$  معادلة ديكارتية لمستقيم  $(D)$  و  $t \in \mathbb{R}$  تمثيل بارامترى لمستقيم  $(D')$

1- حدد معادلة ديكارتية لمستقيم  $(\Delta)$  مار من  $A$  و موجه بـ  $\vec{u}$

2- أعط ثلاث نقط من المستقيم  $(D)$  و متجهة موجهة له.

3- حدد معادلة ديكارتية للمستقيم  $(D')$ . أنشئ الشكل.

### ملاحظة

\* لكل عدد حقيقي غير منعدم  $k$ ، المعادلتان  $ax+by+c=0$  و  $akx+bky+kc=0$  متكافئتين، فهما معادلتان لنفس المستقيم  
\* للمستقيم مالا نهاية من المعادلات المتكافئة.

### ب- المستقيم المعرف بنقطتين

#### خاصة

في مستوى منسوب إلى معلم  $(O;\vec{i};\vec{j})$  نعتبر  $A \neq B$  إذا كان  $A(x_A;y_A)$  و  $B(x_B;y_B)$  فان إحدى معادلات ديكارتية لـ  $(AB)$  هي  $(x-x_A)(y_B-y_A)-(y-y_A)(x_B-x_A)=0$

#### مثال

$A(-2;3)$  و  $B(-1;-2)$  حدد معادلة  $(AB)$

### ج- حالات خاصة

#### \* المستقيم القاطع لمحوري المعلم

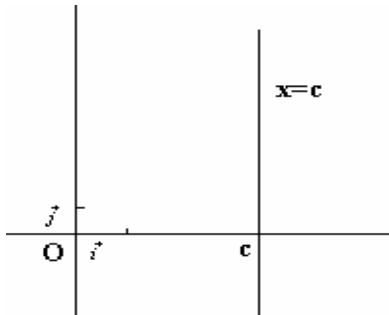
يقطع مستقيم  $(D)$  محوري معلم في نقطتين مختلفتين  $A(a;0)$  و  $B(0;b)$  إذا و فقط إذا كان للمستقيم

$(D)$  معادلة ديكارتية على شكل  $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$  حيث  $a \neq 0$  و  $b \neq 0$

#### \* المستقيم الموازي لمحور الأرتاب

#### خاصة

يكون مستقيم مواز لمحور الأرتاب اذا و فقط كان له معادلة من نوع  $x=c$



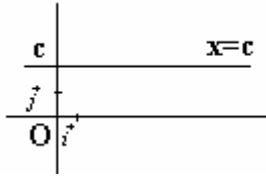
**ملاحظة** ليكن  $(a;b) \neq (0;0)$

تكون  $ax+by+c=0$  معادلة مستقيم مواز لمحور الأرتاب إذا و فقط إذا كان  $b=0$

## \* المستقيم الموازي لمحور الأفصل

### خاصة

يكون مستقيم مواز لمحور الأرتاب إذا و فقط كان له معادلة من نوع  $y = c$ .



## \* المستقيم غير الموازي لمحور الأرتاب

(P) مستوى منسوب إلى معلم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

$$(D): ax + by + c = 0$$

(D) غير مواز لمحور الأرتاب تكافئ  $b \neq 0$

$$\text{إذن معادلة (D) تصبح } y = \frac{-b}{a}x - \frac{c}{a}$$

$$\text{نضع } m = \frac{-a}{b} \text{ ; } p = \frac{-c}{b} \text{ إذن معادلة (D) تكتب } y = mx + p$$

بالعكس نعتبر  $y = mx + p$  معادلة (D)

ومنه  $\vec{u}(1; m)$  موجهة لـ (D) و لدينا  $\det(\vec{u}; \vec{j}) \neq 0$

إذن (D) لا يوازي محور الأرتاب.

### خاصة

(P) مستوى منسوب إلى معلم

يكون المستقيم (D) غير مواز لمحور الأرتاب إذا و فقط إذا كانت معادلة (D) على شكل  $y = mx + p$

العدد  $m$  يسمى المعامل الموجه للمستقيم (D)

المتجهة  $\vec{u}(1; m)$  موجهة للمستقيم (D)

المعادلة  $y = mx + p$  تسمى المعادلة المختزلة للمستقيم (D)

### ملاحظة

إذا كان  $\vec{u}(\alpha; \beta)$  موجهة لمستقيم غير مواز لمحور الأرتاب فإن المعامل الموجه له هو العدد  $\frac{\beta}{\alpha}$

### تمرين

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ،

$$\text{نعتبر النقطة } A(-2; 1) \text{ و } t \in \mathbb{R} \text{ و } (\Delta): \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + t \end{cases}$$

1- حدد المعادلة المختزلة للمستقيم (D) المار من A و معامل الموجه  $\frac{-1}{2}$ .

2- حدد المعامل الموجه للمستقيم (Δ) ثم معادلته المختزلة.

## III - الأوضاع النسبية لمستقيم

### 1- التوازي

$$(D_1): ax + by + c = 0 \text{ ; } (D_2): a'x + b'y + c' = 0$$

$$(D_2) \text{ موجهة لـ } (D_1) \text{ و } \vec{u}'(-b'; a') \text{ موجهة لـ } (D_2)$$

$$\det(\vec{u}; \vec{u}') = 0 \text{ تكافئ } (D_1) // (D_2)$$

$$\text{تكافئ } ab' - a'b = 0$$

### ميرهنة 1

ليكن (P) مستوى منسوب إلى معلم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  و  $(a; b) \neq (0; 0)$  و  $(a'; b') \neq (0; 0)$ .

$$\text{نعتبر } (D_1): ax + by + c = 0 \text{ ; } (D_2): a'x + b'y + c' = 0$$

$$(D_1) // (D_2) \text{ إذا و فقط إذا كان } ab' - a'b = 0$$

## ميرھنة 2

ليكن  $(P)$  مستوى منسوب إلى معلم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  و  $(D_2): y = m'x + p'$  ;  $(D_1): y = mx + p$  اذا و فقط اذا كان  $m = m'$

### مثال

$(D_1): 2x - 3y + 4 = 0$  ;  $(D_2): -4x + 6y + 1 = 0$   
هل  $(D_1)$  و  $(D_2)$  منفصلا أم منطبقان

## -2 التقاطع

### ميرھنة 1

ليكن  $(P)$  مستوى منسوب إلى معلم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  و  $(a; b) \neq (0; 0)$  و  $(a'; b') \neq (0; 0)$  .  
نعتبر  $(D_1): ax + by + c = 0$  ;  $(D_2): a'x + b'y + c' = 0$   
 $(D_1)$  و  $(D_2)$  متقاطعان اذا و فقط اذا كان  $ab' - a'b \neq 0$   
و زوج إحداثيتي تقاطعهما هو حل النظمة

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

## ميرھنة 2

ليكن  $(P)$  مستوى منسوب إلى معلم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  و  $(D_2): y = m'x + p'$  ;  $(D_1): y = mx + p$  اذا و فقط اذا كان  $m \neq m'$   
و زوج إحداثيتي تقاطعهما هو حل النظمة

$$\begin{cases} y = mx + p \\ y = m'x + p' \end{cases}$$

### مثال

$(D_1): x + 3y - 5 = 0$  ;  $(D_2): 2x + y - 1 = 0$   
تأكد أن  $(D_1)$  و  $(D_2)$  متقاطعان و حدد تقاطعهما

### تمرين

ليكن  $ABC$  مثلثا و  $I$  و  $J$  و  $K$  نقط حيث  $I$  منتصف  $[BC]$  و  $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$  ;  $\overrightarrow{CK} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

نسب المستوى إلى معلم  $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

- 1- حدد إحداثيات النقط  $I$  و  $J$  و  $K$
- 2- بين أن النقط  $I$  و  $J$  و  $K$  مستقيمة
- 3- حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم  $(IJ)$  ثم حدد معادلة ديكارتية له.

### تمرين

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، نعتبر النقطتين  $A(-2; 1)$  و  $B(2; 4)$  و  $\vec{u}(5; 2)$

و  $(D): 2x - 3y + 1 = 0$  و  $(D_m): (m-1)x - 2my + 3 = 0$

- 1- حدد معادلة ديكارتية للمستقيم  $(\Delta)$  المار من  $A$  و الموجه بالمتجهة  $\vec{u}$
- 2- تأكد أن  $(D)$  و  $(\Delta)$  متقاطعان و حدد تقاطعهما.

3- أ- حدد  $m$  حيث  $(D) \parallel (D_m)$

ب- حدد  $m$  حيث  $B \in (D_m)$

4- أ- أنشئ المستقيمات  $(D_0)$  ;  $(D_1)$  ;  $(D_2)$

ب - بين أن جميع المستقيمات تمر من النقطه  $C\left(3; \frac{3}{2}\right)$

### تمرين

نعتبر  $A(10; 3)$  ;  $B(6; 7)$  ;  $C(0; 2)$

حدد معادلة ديكارتية لكل متوسط للمثلث  $ABC$   
حدد زوج إحداثيتي  $G$  مركز ثقل  $ABC$ .

**تمرين**

ليكن  $ABCD$  و  $EFGH$  متوازيي الأضلاع حيث  $E \in [AB)$  و  $G \in [AD)$   
أثبت أن المستقيمت  $(BG)$  و  $(ED)$  و  $(CF)$  اما متوازية إما متقاطعة ( يمكن اعتبار المعلم  
(  $A; \overline{AB}; \overline{AD}$  )